Exercice 1. [inégalités]

1. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$: $0 < \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.
2. Démontrer que, pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geqslant 1+x$

Exercice 2. [équations, inéquations]
Soit a un nombre réel.

1. Résoudre, selon la valeur de a, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + ax + 1 = 0$.
2. Résoudre les inéquations d'inconnue $b \in \mathbb{R}$:
   (a) $-b - \sqrt{b^2-4} > 0$
   (b) $-b + \sqrt{b^2-4} > 0$
3. En déduire, selon la valeur de a, les solutions de l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $e^{2x} + ae^x + 1 \geqslant 0$.

Exercice 3. [équation à deux variables]
Le but de l'exercice est de résoudre l'équation, notée (E), d'inconnues x et y des réels :

$$\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$$

On rappelle que pour tous réels a et b, on a :
— $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
— $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

1. Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(x+y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

2. En écrivant $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$ et $y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}$, démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

3. Résoudre l'équation (E).
4. Représenter graphiquement les solutions de (E).